Discrete Mathematics 33 (1981) 139–147.

PARTITIONS LINEAIRES ARGUESIENNES D'UN ESPACE VECTORIEL

Julien CONSTANTIN et Bernard COURTEAU
Département de Mathématiques, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada

Received 13 November 1978

In this work, we study linear and desarguesian partitions of a finite dimensional vector space over a skew-field K. When K is finite, we describe the set of all these partitions as a homogeneous space of the general linear group and we give an enumeration formula.

0. Introduction

Reprenant une question étudiée par Taussky et Todd [5] et généralisant une méthode due à Zaremba [6], Herzog et Schönheim [3] utilisent certaines partitions en sous-groupes d'un groupe abélien fini pour donner une condition nécessaire à l'existence d'un recouvrement parfait d'un ensemble de la forme $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, sujet intimement relié à la théorie du codage. Ils mentionnent que le problème de la détermination de toutes les partitions en sous-groupes d'un groupe abélien fini reste ouvert. Par ailleurs, dans [1], un certain type de partitions d'un groupe abélien, appelées "parallélismes", est utilisé pour donner une caractérisation géométrique des groupes abéliens qui admettemt une superstructure vectorielle.

Dans ce travail, nous étudions certaines partitions d'un espace vectoriel V fini ou non: les partitions linéaires et arguésiennes. Nous voyons comment les construire et nous montrons que, dans le cas fini, le groupe linéaire général de V agit transitivement sur leur ensemble, donnant par là un moyen de les dénombrer.

Remarquons enfin que, par suite du Théorème 2 de [1], il n'y a ici aucune perte de généralité à se limiter aux espaces vectoriels plutôt qu'aux groupes abéliens.

1. Généralités

Soit V un espace vectoriel à gauche sur un corps K.

Définition 1.1. Une *partition de* V est un ensemble P tel que

(P1) tout élément de P est un sous-espace vectoriel non-nul de V,

(P2) si $W_1, W_2 \in P$ et $W_1 \neq W_2$, alors $W_1 \cap W_2 = \{0\}$,

(P3) $V = \bigcup \{W \mid W \in P\}$.

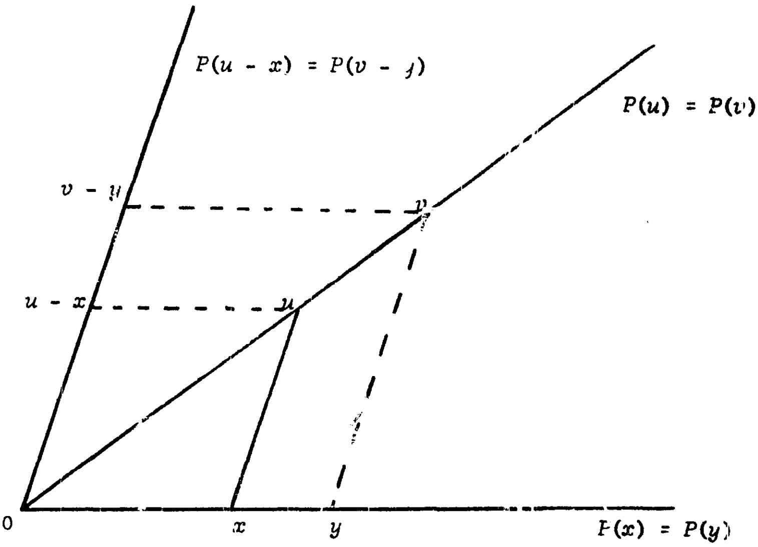

Fig. 1

Une partition sera dite *propre* si card $P > 1$, elle sera dite ***homogène de rang r*** ou simplement de rang r si tous les sous-espaces appartenant à P sont de même dimension r. Convenons d'écrire pour $S \subset V$, $S^* = S \setminus \{0\}$. Une partition P de V induit sur V^* une relation d'équivalence. Pour tout $x \in V^*$, il sera utile de noter $P(x)$ l'unique élément $W \in P$ tel que $x \in W$.

Définition 1.2. Une partition propre P de V sera dite *linéaire* si elle possède la propriété suivante:

(L) pour tout $x, y, u \in V^*$ tel que $P(x) = P(y) \neq P(u)$, il existe un $v \in V^*$ tel que $P(v) = P(u)$ et $P(v-y) = P(u-x)$. (Cf. Fig. 1.)

On voit aisément qu'un tel v est unique, car si $v_1 \in V^*$ est tel que $P(v_1) = P(u)$ et $P(v_1 - y) = P(u-x)$, alors $v - v_1 \in P(u-x)$, puisque $P(u-x)$ est un sous-espace; d'où $v - v_1 \in P(u-x) \cap P(u) = \{0\}$ et $v = v_1$.

Note. Il est clair que l'ensemble D de toutes les droites vectorielles de V est une partition linéaire.

Proposition 1.3. *Soit P une partition linéaire, $V_1, V_2 \in P$ où $V_1 \neq V_2$. Alors pour toute suite $v_1, \ldots, v_m$ d'éléments distincts de V_1 telle que $v_1 \neq 0$ et pour tout $w_1 \in V_2^*$, il existe $V_3 \in P$, $V_3 \neq V_1$, $V_3 \neq V_2$ et une suite $w_1, w_2, \ldots, w_m$ d'éléments distincts de V_2 tels que $v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots, v_m - w_m \in V_3$. De plus, si $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ est libre, il en est de même pour $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ et pour $\{v_1 - w_1, \ldots, v_m - w_m\}$.*

Démonstration. La première partie de la proposition est une conséquence immédiate de la propriété (L), V_3 étant $P(w_1 - v_1)$.

Pour démontrer la second partie, supposons $\{v_1, \ldots, v_n\}$ libre et soit $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0$; alors

$$\sum \lambda_i (w_i - v_i) = \sum \lambda_i w_i - \sum \lambda_i v_i = -\sum \lambda_i v_i \in V_3 \cap V_1 = \{0\}$$

et ainsi tous les λ_i sont nuls. De même si $\sum \lambda_i (w_i - v_i) = 0$, alors $\sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i v_i \in V_2 \cap V_1 = \{0\}$ et tous les λ_i sont nuls.

Corollaire 1.4. Toute partition linéaire de V est homogène.

2. Caractérisations des partitions linéaires. Partitions arguésiennes. Corps de scalaires

Théorème 2.1. *Soit P une partition propre d'un espace vectoriel V; alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

(a) *P est linéaire.*

(b) *Pour tout entier naturel m et tout $V_0, V_1, \ldots, V_m \in P$, on a que $V_0 \cap (V_1 + V_2 + \cdots + V_m) \neq \{0\}$ implique $V_0 \subset V_1 + \cdots + V_m$.*

(c) *Pour tout $V_0, V_1, V_2 \in P$, $V_0 \cap (V_1 + V_2) \neq \{0\}$ implique $V_0 \subset V_1 + V_2$.*

(d) *Pour tout entier naturel m et pour tout $V_1, V_2, \ldots, V_m \in P$ la trace de P sur $V_1 + \cdots + V_m$ i.e. $\{W \in P \mid W \subset V_1 + \cdots + V_m\}$ est une partition de $V_1 + \cdots + V_m$.*

(e) *Pour tout $V_1, V_2 \in P$, la trace de P sur $V_1 + V_2$ est une partition de $V_1 + V_2$.*

Démonstration. Montrons que (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(e)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(a).

(a)$\Rightarrow$(b). Il est clair que la Proposition (b) est vraie pour $m = 1$. Supposons-la vraie pour $m = k$ et soit $V_0 \cap (V_1 + V_2 + \cdots + V_{k+1}) \neq \{0\}$. Si $V_0 \cap V_1 \neq \{0\}$, alors $V_0 = V_1 \subset V_1 + \cdots + V_{k+1}$. Si $V_0 \cap V_1 = \{0\}$, prenons $y_1 \in V_0 \cap (V_1 + \cdots + V_{k+1}) - \{0\}$, alors $y_1 = x_1 + \cdots + x_{k+1}$ avec $x_i \in V_i$ et $y_1 - x_1 \neq 0$. Si $x_1 = 0$, alors $V_0 \cap (V_2 + \cdots + V_{k+1}) \neq \{0\}$ et en vertu de l'hypothèse d'induction, $V_0 \subset V_2 + \cdots + V_{k+1}$. Si $x_1 \neq 0$, formons une base $\{x_1, x_2', \ldots, x_r'\}$ de V_1. Puisque $y_1 \notin V_1$, il existe, d'après la Proposition 1.3, un $V' \in P$ et une base $\{y_1, \ldots, y_r\}$ de V_0 telle que $\{x_1 - y_1, x_2' - y_2, \ldots, x_r' - y_r\} \subset V'$. Mais $0 \neq y_1 - x_1 = x_2 + \cdots + x_{k+1} \in V' \cap (V_2 + \cdots + V_{k+1})$ et, par hypothèse d'induction, $V' \subset V_2 + \cdots + V_{k+1}$. Par ailleurs, pour tout $j \geq 1$, $y_j \in V_1 + V'$. Donc $V_0 \subset V_1 + \cdots V_{k+1}$.

(b)$\Rightarrow$(d). Soit $P_1 = \{W \in P \mid W \subset V_1 + \cdots + V_m\}$ où $V_i \in P$, $i = 1, \ldots, m$. Si $x \in (V_1 + \cdots + V_m) - \{0\}$, alors il existe $V_0 \in P$ avec $x \in V_0$. Ainsi $V_0 \cap (V_1 + \cdots + V_m) \neq \{0\}$ et donc $V_0 \subset V_1 + \cdots + V_m$ i e. $V_0 \in P_1$.

(d)$\Rightarrow$(e). Evident.

(e)$\Rightarrow$(c). Soit $V_0, V_1, V_2 \in P$ avec $0 \neq x \in V_0 \cap (V_1 + V_2)$; alors puisque $\{W \in P \mid W \subset V_1 + V_2\}$ est une partition de $V_1 + V_2$ il existe $W \in P$ avec $x \in W \subset V_1 + V_2$; d'où $V_0 = W \subset V_1 + V_2$.

(c)$\Rightarrow$(a). Soient $x, y, u \in V^*$ avec $P(x) = P(y) \neq P(u)$; comme $x \in P(x) \cap (P(u) + P(u-x))$, on a $P(x) \subset P(u) + P(u-x)$. Ainsi $y = v + t$ où $v \in P(u)$ et $t \in P(u-x)$. Donc $v - y \in P(u-x)$, ce qu'il fallait montrer.

Corollaire 2.2. *Si P est une partition linéaire de rang r de l'espace vectoriel V de dimension n sur K, alors il existe $V_1, \ldots, V_t \in P$ tels que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ et $n = rt$.*

Démonstration. Si $V_1, \ldots, V_i \in P$ sont tels que la somme $V_1 + \cdots + V_i$ soit directe et si $V - (V_1 + \cdots + V_i) \neq \emptyset$, alors il existe $V_{i+1} \in P$ tel que $V_{i+1} \not\subset V_1 + \cdots + V_i$ et, en vertu de (b), $V_{i+1} \cap (V_1 + \cdots + V_i) = \{0\}$. D'où la somme $V_1 + \cdots + V_i + V_{i+1}$ est directe. Cette construction s'arrêtera lorsque $V - (V_1 + \cdots + V_i) = \emptyset$.

Corollaire 2.3. *Si P est une partition de V de rang 1 ou $\frac{1}{2}n$ (lorsque $n = \dim V$ est pair), alors P est linéaire.*

C'est une conséquence immédiate de la partie (c) du Théorème 1.

Note. Fournier [2] a montré que pour tout espace vectoriel de dimension paire $n \geq 6$, il existe une partition homogène de rang 2 qui n'est pas linéaire.

Définition 2.4. Soit P une partition propre de V. Nous dirons que P est *arguésienne* si la propriété suivante est satisfaite:

(D) pour tout $x, y, z, x', y', z' \in V^*$ tels que $P(x) \neq P(y) \neq P(z) \neq P(x)$, $P(x) = P(x')$, $P(y) = P(y')$, $P(z) = P(z')$, $P(y-x) = P(y'-x')$ et $P(z-x) = P(z'-x')$, on a $P(y-z) = P(y'-z')$. (Cf. Fig. 2.)

Définition 2.5. Soit P une partition propre de V. On appelle *scalaire de P* tout endomorphisme α de V *(en tant que groupe abélien)* tel que $\alpha(W) \subseteq W$ pour tout $W \in P$.

Remarque. Tout scalaire α non-nul est injectif. En effet, soit $x \in V^*$ avec $\alpha(x) = 0$. Si $y \in V^*$ est tel que $P(y) \neq P(x)$, alors $\alpha(y-x) = \alpha(y) - \alpha(x) = \alpha(y) \in P(y-x) \cap P(y) = \{0\}$ et donc $\alpha(y) = 0$. Si, au contraire $P(y) = P(x)$, prenons un z

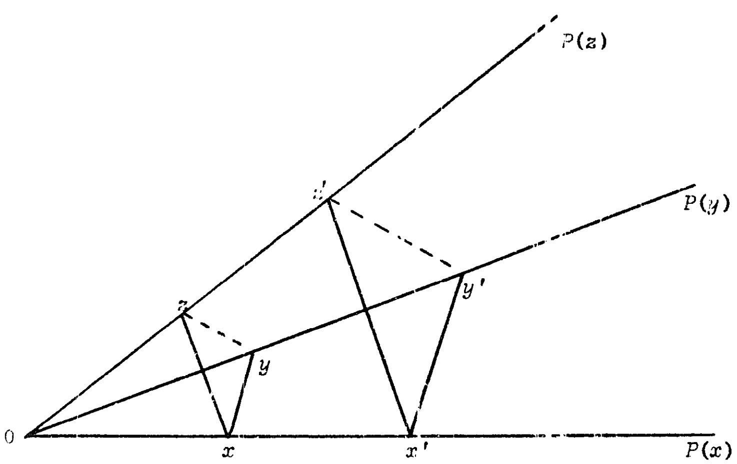

Fig. 2

tel que $P(z) \neq P(x)$. D'après ce qui précède, on a successivement $\alpha(z) = 0$ et $\alpha(y) = 0$. D'où, enfin, $\alpha = 0$.

Les partitions linéaires d'un groupe abélien ont été étudiées dans [1] en utilisant un langage plus "géométrique". Les parties des Théorèmes 2 et 3 que nous allons utiliser peuvent s'énoncer ainsi, dans la terminologie adoptée ici.

Théorème 2 [1]. *Si P est une partition linéaire de V, alors l'ensemble $\Sigma(P)$ des scalaires de P forme un corps contenu dans* End(V) *et contenant K. De plus, l'action sur V^* du groupe multiplicatif $\Sigma(P)^*$ est simple.*

Théorème 3 [1]. *Soit P une partition linéaire de V. Alors P est arguésienne si et seulement si le groupe $\Sigma(P)^*$ agit d'une façon transitive sur chacune des classes W^*, où $W \in P$.*

Remarque. Il existe, même dans le cas fini, des partitions linéaires non-arguésiennes. Ceci contredit le Théorème 4 de [1] dont la "démonstration" ne couvrait pas tous les cas possibles. Par exemple, les dix paires suivantes sont les bases de dix plans formant une partition linéaire et non arguésienne de $(\mathrm{GF}(3))^4$:

$$\{0001, 0010\}, \{0100, 1000\}, \{0101, 1010\}, \{1001, 1210\}, \{1101, 0110\},$$
$$\{2101, 2210\}, \{0201, 2110\}, \{2001, 1110\}, \{2201, 0210\}, \{1201, 2010\}.$$

Il suffit de considérer $x = 0001$, $x' = 0010$, $y = 0100$, $y' = 1200$, $z = 0101$, $z' = 1212$.

3. Détermination de l'ensemble des partitions linéaires et arguésiennes

Théorème 3.1. *Soit $n = \dim V$.*

(a) *Si P est une partition linéaire de rang r et arguésienne de V, alors $t = n/r$ est un entier, il existe une extension L de K, de degré r, et une bijection K-linéaire $\phi : V \to L^t$ telle que $P = \phi^{-1}(\mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ est l'esemble de toutes les droites vectorielles de L^t.*

(b) *Si $n = rt$, où r et t sont des entiers naturels et si L est une extension de degré $r < n$ du corps K, alors pour toute bijection K-linéaire $\phi : V \to L^t$ (il en existe toujours), l'ensemble $P = \phi^{-1}(\mathcal{D})$ est une partition linéaire de rang r et arguésienne de V.*

Démonstration. (a) Le fait que n/r soit un entier est une conséquence immédiate du Corollaire 2.2. Notons $L = \Sigma(P)$ le corps des scalaires de la partition P. Pour définir ϕ, prenons $W_1, W_2, \ldots, W_t \in P$ avec $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$ et choisissons $x_{01} \in W_1^*, \ldots, x_{0t} \in W_t^*$. Tout $x \in V$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_t = \alpha_1(x_{01}) + \cdots + \alpha_t(x_{0t})$, où les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t \in L$ sont uniquement déterminés puisque, d'après les Théorèmes 2 et 3 de [1], L^* agit transitivement et simplement sur chaque W_i^*. Posons alors $\phi(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$. Il est évident que $\phi : V \to L^t$ est une bijection

K-linéaire. Si on pose, pour $\lambda \in L$ et $x \in V, \lambda x = \lambda(x)$, V devient un espace vectoriel sur L et

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x) &= \phi(\lambda(\alpha_1(x_{01}) + \cdots + \alpha_t(x_{0t})))\\ &= \phi(\lambda\alpha_1(x_{01}) + \cdots + \lambda\alpha_t(x_{0t}))\\ &= (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_t) = \lambda\phi(x).\end{aligned}$$

ϕ est donc L-linéaire. Si $W \in P$, alors, d'après les Théorèmes 2 et 3 de [1], $W = \{\alpha(x) \mid \alpha \in L\} = Lx$ pour un $x \in W$. L est donc une extension de degré r de K et $\phi(W) = L\phi(x) \in \mathscr{D}$. D'un autre côté, si $D = \{\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \mid \lambda \in L\} \in \mathscr{D}$, alors il existe un et un seul $W \in P$ tel que $x = \alpha_1(x_{01}) + \cdots + \alpha_t(x_{0t}) \in W^*$ et l'on a $\phi(W) = D$.

(b) On vérifie tout de suite que $\phi^{-1}(\mathscr{D})$ est une partition homogène de rang r. La propriété (c) du Théorème 1 est également vérifiée en vertu de l'égalité

$$\phi^{-1}(D_1) \cap (\phi^{-1}(D_2) + \phi^{-1}(D_3)) = \phi^{-1}(D_1 \cap (D_2 + D_3))$$

et des propriétés des droites de L^t. Pour vérifier que $P = \phi^{-1}(\mathscr{D})$ est arguésienne, montrons que L est contenu dans le corps des scalaires de P et que L^* agit transitivement sur toute classe $\phi^{-1}(D)^*$ de P. Définissons l'action de L sur V par l'égalité $\lambda x = \phi^{-1}(\lambda\phi(x))$; on a

$$\begin{aligned}\lambda(x+y) &= \phi^{-1}(\lambda\phi(x+y)) = \phi^{-1}(\lambda\phi(x) + \lambda\phi(y))\\ &= \phi^{-1}(\lambda\phi(x)) + \phi^{-1}(\lambda\phi(y)) = \lambda x + \lambda y.\end{aligned}$$

V devient alors un espace vectoriel sur L et ϕ est L-linéaire. Si $x \in \phi^{-1}(D)$, alors $\lambda x = \phi^{-1}(\lambda\phi(x)) \in \phi^{-1}(D)$. L est donc formé de scalaires de P. Enfin, si $x, y \in \phi^{-1}(D^*)$, alors $\phi(x), \phi(y) \in D^*$ et $\phi(y) = \lambda\phi(x)$ pour un $\lambda \in L^*$, d'où $y = \phi^{-1}(\lambda\phi(x)) = \lambda x$. L^* agit donc transitivement sur $\phi^{-1}(D)^*$.

Désignons par $P_r(V)$ l'ensemble de toutes les partitions linéaires de rang r et arguésiennes de V avec $n = \dim V = rt$ où r et t sont des entiers naturels plus grands que 1.

Proposition 3.2. *Si $P \in P_r(V)$ et $T \in \mathrm{GL}(V)$, alors*

$$TP = \{TW \mid W \in P\} \in P_r(V).$$

C'est une conséquence immédiate du fait que les propriétés d'être linéaire et arguésienne sont conservées par les isomorphismes vectoriels.

Proposition 3.3. *Si $P_r(V) \neq \emptyset$ et si $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ est libre dans V, alors il existe $P \in P_r(V)$ avec $\{x_1, x_2\} \subset V_1 \in P$, $\{x_3, x_4\} \in V_2 \in P$ et $V_1 \neq V_2$.*

Démonstration. Soit $P_0 \in P_r(V)$ avec $W_1, W_2 \in P_0$ et $W_1 \neq W_2$. Si $\{y_1, y_2\}, \{y_3, y_4\}$ sont des parties libres de W_1 et W_2 respectivement et si $S \in \mathrm{GL}(V)$ est telle que $Sy_i = x_i$, alors SP_0 est la partition cherchée.

Proposition 3.4. *Si $T \in \mathrm{GL}(V)$ est telle que $TP = P$ pour tout $P \in P_r(V) \neq \emptyset$, alors T est une homothétie: $T = kI$, où k est dans le centre de L.* (La réciproque est évidente)

Démonstration. Supposons $\{x, Tx\}$ libre; prenons $x_1 \in V$ tel que $\{x, x_1, Tx\}$ soit libre. Il existe $P_1 \in P_r(V)$ avec $\{x, x_1\} \subset V_1 \in P_1$ et $Tx \notin V_1$; mais $TP_1 = P_1$ par hypothèse; donc $TV_1 \in P_1$ et $V_1 \cap TV_1 = \{0\}$. Ainsi $\{x, x_1, Tx, Tx_1\}$ est libre et donc aussi $\{x, x_1, Tx, Tx_1 + x\}$. Selon la Proposition 3.3, il existe $P_2 \in P_r(V)$ avec $\{x, x_1\} \subset W_1 \in P_2$, $\{Tx, Tx_1 + x\} \subset W_2 \in P_2$ et $W_1 \neq W_2$. Comme $TP_2 = P_2$, alors $Tx \in TW_1 \in P_2$ et $TW_1 = W_2$. Ainsi $Tx_1 \in W_2$ et donc $x \in W_2$ ce qui est impossible. Donc, pour tout $x \in V$, $\{x, Tx\}$ n'est pas libre: il existe $k(x) \in K$ avec $T(x) = k(x)x$. Reste à voir que $k(x) = k$ ne dépend pas de x. Si $\{x, y\}$ libre, alors $Tx = k(x)x$, $Ty = k(y)y$ et $T(x+y) = k(x+y)(x+y)$ d'où $k(x)x + k(y)y = k(x+y)x + k(x+y)y$ et donc $k(x) = k(x+y) = k(y)$. Dans le cas où x et y sont dépendants, prenons un z indépendant de x et de y. On aura $k(x) = k(z) = k(y)$, et la démonstration est complète.

Proposition 3.5. *Soit L une extension de K et $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de l'espace vectoriel L^t; si $\sigma : L^t \to L^t$ est une bijection K-linéaire avec $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, alors σ est semi-linéaire et l'automorphisme associé à σ laisse K fixe.*

Démonstration. Soit $x \in L^t - \{0\}$ et $\lambda \in L^*$; puisque λx est sur la droite contenant x, $\sigma(\lambda x)$ est sur la droite contenant $\sigma(x)$. Donc $\sigma(\lambda x) = \mu(\lambda, x)\sigma(x)$, où $\mu(\lambda, x) \in L^*$. $\mu(\lambda, x) = \mu(\lambda)$ ne dépend pas de x: on le montre en prenant x, y tels que $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ soit indépendant et en suivant un raisonnement analogue à celui qui nous sert à terminer la démonstration de la Proposition 3.4.

On voit facilement que μ est un automorphisme de L laissant K fixe. En effet, si $x \neq 0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in L^*$, alors

$$\sigma(\lambda_1\lambda_2 x) = \mu(\lambda_1\lambda_2)\sigma(x) = \mu(\lambda_1)\sigma(\lambda_2 x) = \mu(\lambda_1)\mu(\lambda_2)\sigma(x)$$

et donc

$$\mu(\lambda_1\lambda_2) = \mu(\lambda_1)\mu(\lambda_2).$$

De même

$$\sigma(\lambda_1 x + \lambda_2 x) = \mu(\lambda_1)\sigma(x) + \mu(\lambda_2)\sigma(x) = \mu(\lambda_1 + \lambda_2)\sigma(x)$$

entraîne que $\mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2) = \mu(\lambda_1 + \lambda_2)$. Enfin, si $k \in K^*$, alors $\sigma(kx) = k\sigma(x) = \mu(k)\sigma(x)$ et $\mu(k) = k$.

Remarque. Supposons maintenant que K soit un corps fini. Alors $P_r(V) \neq \emptyset$, puisque tout corps fini possède une extension de degré r. De plus, les corps de scalaires L_1 et L_2 de deux partitions $P_1, P_2 \in P_r(V)$ sont isomorphes, étant tous les deux extensions de même degré du corps fini K. On peut donc ainsi prendre comme but des applications ϕ de Théorème 3.3 une extension L fixée une fois pour toutes.

Théorème 3.6. *Soient r, n, t des entiers naturels supérieurs à 1 tels que $n = rt$, V un espace vectoriel de dimension n sur le corps fini K, L une extension de degré r de K. Alors $P_r(V) \cong \mathrm{GL}(V)/H$, où H est isomorphe au groupe $S(L^t, K)$ des bijections semi-linéaires de L^t sur L^t dont les automorphismes associés laissent K fixe.*

Démonstration. La Proposition 3.2 nous permet de définir une action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $P_r(V)$ comme suit: pour tout $T \in \mathrm{GL}(V)$ et $P \in P_r(V)$, $TP = \{TW \mid W \in P\}$.

$\mathrm{GL}(V)$ agit transitivement sur $P_r(V)$. En effet, si $P_1, P_2 \in P_r(V)$, alors, d'après le Théorème 3.1 et la remarque précédente, il existe deux bijections K-linéaires $\phi_1 : V \to L^t$ et $\phi_2 : V \to L^t$ telles que $\phi_1^{-1}(\mathcal{D}) = P_1$ et $\phi_2^{-1}(\mathcal{D}) = P_2$. Si on pose $T = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$ alors $T \in \mathrm{GL}(V)$ et $TP_1 = P_2$.

Le groupe d'isotropie $\mathrm{Iso}(P_0) = \{T \in \mathrm{GL}(V) \mid TP_0 = P_0\}$ est isomorphe à $S(L^t, K)$ le groupe des bijections semi-linéaires de L^t sur L^t dont les automorphismes associés laissent K fixe. En effet, si $\phi_0 : V \to L^t$ désigne une bijection K-linéaire telle que $\phi_0^{-1}(\mathcal{D}) = P_0$, on définit l'homomorphisme $\rho : S(L^t, K) \to \mathrm{Iso}(P_0)$ par la formule $\rho(\sigma) = \phi_0^{-1} \circ \sigma \circ \phi_0$. En effet, $\rho(\sigma) \in \mathrm{Iso}(P_0)$ puisque $\phi_0^{-1} \circ \sigma \circ \phi_0(P_0) = \phi_0^{-1} \circ \sigma(\mathcal{D}) = \phi_0^{-1}(\mathcal{D}) = P_0$. (On sait que $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$). De plus ρ est injectif, car $\rho(\sigma) = I = \phi_0^{-1} \circ \sigma \circ \phi_0$ entraine que $\sigma = I$. Enfin ρ est surjectif. En effet, si $T \in \mathrm{Iso}(P_0)$, considérons $\sigma = \phi_0 \circ T \circ \phi_0^{-1}$. Il est immédiat que $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et que σ est K-linéaire bijective. La Proposition 3.5 entraine alors que $\sigma \in S(L^t, K)$. Donc $T = \phi_0^{-1} \circ \sigma \circ \phi_0 = \rho(\sigma)$.

Remarque 1. Il est clair que le Théorème 3.6 est également valide lorsque K est infini pourvu que l'on restreigne $P_r(V)$ à $P_r(V, L)$ l'ensemble des partitions linéaires arguésiennes de rang r dont les corps de scalaires sont isomorphes à L.

Remarque 2. Grâce à la Proposition 3.4 que donne une caractérisation des homothéties, on peut démontrer d'une façon analogue que le groupe linéaire projectif $\mathrm{GL}(V)/K^*$ agit transitivement sur $P_r(V)$. Le groupe d'isotropie est, dans ce cas, isomorphe à $S(L^t, K)/K^*$.

Corollaire 3.7. *Si $|K| = q$ et si $n = rt$, alors*

$$|P_r(V)| = \frac{1}{r} q^{n(n-t)/2} \prod \{q^i - 1) \mid i = 1, \ldots, n \quad et \quad r \nmid i\}$$

Démonstration. Il suffit de calculer les ordres du groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ et du groupe $S(L^t, K)$ des applications semi-linéaires dont les automorphismes associés laissent K fixe (ces automorphismes forment le groupe de Galois $G(L, K)$ de L sur K).

D'une part, on a

$$|\mathrm{GL}(V)| = q^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1)$$

(Voir par exemple [4]). D'autre part,

$$\begin{aligned} |S(L^t, K)| &= |G(L, K) \times \mathrm{GL}(L^t)| = |G(L, K)|\,|\mathrm{GL}(L^t)| \\ &= r(q^r)^{t(t-1)/2} \prod_{j=1}^{t} [(q^r)^j - 1] = rq^{n(t-1)/2} \prod_{j=1}^{t} (q^{rj} - 1) \end{aligned}$$

puisque l'ordre de groupe de Galois $G(L, K)$ est égal au degré de l'extension L sur K.

Références

[1] B. Courteau, La notion de parallélisme dans un groupe abélien, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 21 (1976) 275–285.

[2] R. Fournier, Quelques problèmes sur les partitions de groupes et d'espaces vectoriels, Colloque des mathématiciens du Québec, Chicoutimi (Oct. 1977).

[3] M. Herzog and J. Schönheim, Group partition, factorization and the vector covering problem, Canad. Math. Bull. 15 (1972) 207–214.

[4] O.T. O'Meara, Lectures on linear groups, (A.M.S., Providence, RI, 1974).

[5] O. Taussky and Y. Todd, Covering theorems for groups, Ann. Polon. Math. 21 (1949) 303–308.

[6] S.K. Zaremba, Covering problems concerning abelian groups, J. London Math. Soc. 27 (1952) 242–246.